Teorie pravěpodobnosti [1]

[1] Tyto materiály byly vytvořeny za pomoci grantu FRVŠ číslo 1145/2004.

Náhodný jev a pravděpodobnost

Každou zákonitost sledovanou v přírodě lze zjednodušeně charakterizovat jako vztah určitého komplexu podmínek a výsledku, ke kterému uskutečnění těchto podmínek vede.

Příkladem může být například změna skupenství vody ve vodní páru. Zde je komplexem podmínek zahřátí vody na $100°C$ při tlaku 760 mm. Výsledným jevem změna skupenství molekul vody. Tento jev nastává při realizaci výše uvedených podmínek vždy. Z hlediska teorie pravděpodobnosti jde o tzv. **jev jistý**. Naproti tomu o jevu který při realizaci téhož komplexu podmínek nemůže nikdy nastat mluvíme jako o **jevu nemožném**.

Náhodný jev

Pokud realizace určitého souboru podmínek nevede k jednoznačnému výsledku při opakované realizaci daného souboru podmínek, pak se lze oprávněně domnívat, že je výsledek závislý na dalších blíže nespecifikovaných podmínkách, které lze v tomto smyslu označit za náhodné činitele.

Jevy, které v závislosti na náhodě mohou, ale nemusí při uskutečnění daného souboru podmínek nastat nazýváme náhodnými jevy.

Samotnou realizaci podmínek vedoucí k určitému výsledku pak nazveme **náhodným pokusem**.

Pojem pokus lze v souvislosti s počtem pravděpodobnosti chápat široce. Za pokus lze považovat např. počet vyrobených výrobků během pracovní směny, či celkovou spotřebu el. energie mezi 20 hodinou a 7 hodinou ranní v Českých Budějovicích. Za náhodný pokus lze považovat i zjišťování počtu bílých krvinek u pacienta před a po terapii. Příkladů je celá řada, jistě sami vymyslíte další příklady.

Operace s náhodnými jevy

Podle Stoneovy věty, lze s náhodnými jevy pracovat jako s množinami. Je tedy možné při výpočtech souvisejících s pravděpodobností využít množinových operací. Symbolem A pro tuto chvíli označme množinu. To že a je prvkem množiny A zapíšeme takto:

$$a \in A.$$

Například to, že a_1, a_2 a a_3 jsou prvky množiny A lze zapsat jako

$$A \in \{a_1, a_2, a_3\}.$$

Prázdnou množinu budeme značit pomocí symbolu $\{\emptyset\}$.

Implikace

Jestliže při každé realizaci jevu A nastává jev B, pak říkáme, že jev A má za následek jev B, nebo jinými slovy jev A implikuje jev B. Tuto skutečnost zapíšeme jako

$$A \subset B \ . \tag{1}$$

Sjednocení

Jev který spočívá v realizaci alespoň jednoho z jevů A či B, nazýváme sjednocení jevů A a B. Situaci lze zachytit symbolicky takto:

$$A \cup B \ . \tag{2}$$

Pokud máme více náhodných jevů např.: $A_1, A_2, \ldots, A_n$, pak jejich sjednocením

$$\cup_{i=1}^{n} A_i \ , \tag{3}$$

budeme rozumět takový jev, který zahrnuje realizaci alespoň jednoho z jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Průnik

Průnikem náhodných jevů A a B budeme rozumět současnou realizaci obou jevů tj. A i B. Tento stav zapíšeme symbolicky jako:

$$A \cap B \ . \tag{4}$$

Průnik n jevů A_i pro $i = 1, 2, \ldots, n$ tj. současnou realizaci všech n jevů A_i symbolicky zapíšeme

$$\cap_{i=1}^{n} A_i \tag{5}$$

Jevy opačné

Jevy A a B nazveme jevy opačnými (též doplňkové či komplementární) jestliže budou platit následující relace

$$\begin{gathered} A \cup B = \Omega \\ A \cap B = \{\emptyset\}. \end{gathered} \tag{6}$$

Doplněk k jevu A se zpravidla značí symbolem $\bar{A}$ nebo A^c. Jev $\bar{A}$ spočívá v nenastoupení jevu A.

Jev jistý & jev nemožný

Jak již bylo uvedeno výše, jev který nastává vždy při realizaci určitého komplexu podmínek budeme označovat jevem jistým a zapisovat pomocí symbolu Ω nebo E.

Naopak jev který se nevyskytne nikdy přestože se realizuje komplex určitých podmínek budeme nazývat jevem nemožným a označovat pomocí symbolu 0.

Výběrový prostor

Pokud budeme uvažovat náhodný, například pokus, v jehož průběhu házíme dvakrát mincí. Výsledek každého hodu, tedy padnutí panny či orla bude zaznamenán. Jistě budete souhlasit s tvrzením, že v tomto jednoduchém experimentu jsou možné pouze čtyři výsledky:

$$\{\{hlava, hlava\}, \{hlava, orel\}, \{orel, hlava\}, \{orel, orel\}\}$$

Takováto množina všech možných výsledků se zpravidla nazývá **množina možných výsledků**, někdy také **výběrový prostor**. Symbolicky bývá označována pomocí symbolu Ω.

Jev je v této souvislosti definován jako podmnožina množiny možných výsledků.[1] Uvědomte si, že jevem však může být i samotná množina možných výsledků, což je jev jistý.

Algebra

Pro správné zavedení matematického modelu je nutné zavést jistý systém množin, označme jej $\mathcal{A}$. Ten nazýváme algebrou pokud platí:

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A} \tag{7}$$

$$A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cap B \in \mathcal{A} \tag{8}$$

$$A \in \mathcal{A} \Rightarrow \bar{A} \in \mathcal{A} \tag{9}$$

$$\Omega \in \mathcal{A}, \quad \emptyset \in \mathcal{A} \tag{10}$$

Pravděpodobnostní funkce

Rozdělením pravděpodobnosti na množině $\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ s algebrou $\mathcal{A}$ nazýváme každou nezápornou funkci P na množině Ω takovou, že

$$P(a_1) + P(a_2) + \cdots + P(a_n) = 1 \tag{11}$$

Trojici $\mathcal{A}, \Omega, P,$, kde P je rozdělením pravděpodobnosti na na množině Ω s algebrou $\mathcal{A}$ budeme nazývat pravděpodobnostním prostorem. Pokud bude zároveň platit, že $\Omega = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ a $P(a_1) = P(a_2) = \cdots = P(a_n) = \frac{1}{n}$, tak pravděpodobnostní funkci P nazveme klasickým rozdělením pravděpodobnosti na množině Ω a trojici $(\mathcal{A}, P, \Omega)$ nazveme klasickým rozdělením pravděpodobnosti.

Předpokládejme, že v osudí je 5 černých koulí a tři bílé. Než bude vytažena jedna koule, jste vyzváni k tomu abyste vsadili na barvu tažené koule. Pokud uhodnete získáte 50 Kč. Jak budete sázet. Jistě se shodneme na tom že vsadíte na černou. Proč? Z hlediska matematiky jsou možné dva výsledky losování:

- vytažená koule bude černá

[1] Zamyslete se nad touto větou.

- vytažená koule bude bílá

Zcela jistě to nejsou dva stejně pravděpodobné výsledky. Pravděpodobnost vytažení černé koule je $\frac{5}{8}$, zatímco pravděpodobnost vytažení bíle koule je $\frac{3}{8}$. Vidíte, že jsme přiřadili k "jevům vytažení černé koule" "vytažení bílé koule" určité čísla, tj. podařilo se nám definovat funkci p na množině Ω. Funkce P je rozdělením pravděpodobnosti a je definována takto:
P(jev vytažení černé koule) $= \frac{5}{8}$ a P(jev vytažení bílé koule) $= \frac{3}{8}$. Sami vidíte, že platí:

$$P(\text{jev vytažení černé koule}) + P(\text{jev vytažení bílé koule}) = \frac{5}{8} + \frac{3}{8} = 1$$

Jev vytažení černé koule je pravděpodobnější než jev vytažení bílé koule. V tomto případě je tedy lepší sázet na černou barvu. Tato hra je tzv. strategicky-náhodná.

Axionometrická definice pravděpodobnosti

Jejím autorem je známý matematik a statistik ruského původu A. N. Kolmogorov. Definice je založena na předpokladu, že náhodný jev je podmnožinou výběrového prostoru.

Nechť je ke každému jevu $A \in \Omega$ přiřazeno určité číslo $P(A)$, které nazveme pravděpodobností jevu. Nechť je tato pravděpodobnost $P(.)$ vždy nezáporná tj. bude platit

$$P(A) \geq 0 \tag{12}$$

V této souvislosti mluvíme o tzv. **axiomu nezápornosti.**

Dalším axiomem je tzv. **axiom aditivity**. Ten nám říká, že pravděpodobnost sjednocení konečného či spočetně nekonečného (tj. takového počtu jevů které lze očíslovat za pomoci přirozených čísel) počtu neslučitelných jevů $A_1 \cup A_2 \cup \cdots$ je rovna součtu jejich pravděpodobností, tedy

$$P(A_1 \cup A_1 \cup \cdots) = P(A_1) + P(A_2) + \cdots \tag{13}$$

Posledním axiómem vystupujícím v axionometrické definici pravděpodobnosti je **axiom normy**. Ten říká, že pravděpodobnost jistého jevu je rovna jedné, tj. musí platit:

$$P(\Omega) = 1 \tag{14}$$

Malá poznámka: Axiomatická definice pravděpodobnosti matematicky přesně a nerozporně vymezuje pojem pravděpodobnosti, ale nedává návod jak ji vypočíst. Z tohoto důvodu se při určování pravděpodobnosti využívají i jiné definice, například klasická definice pravděpodobnosti.

Klasická definice pravděpodobnosti

Jejím autorem byl Francouz P. S. Laplace. Při stanovení číselné hodnoty pravděpodobnosti vycházíme z klasické definice pravděpodobnosti. Ta je definována takto:

Může-li jistý prováděný pokus vykázat konečný počet n různých výsledků (hovoříme o nich jako o elementárních jevech), které jsou stejně možné a jestliže m z těchto výsledků má za následek nastoupení jevu A (v podstatě jevy příznivé), kdežto zbylých $n-m$ výsledků je vylučuje, potom je pravděpodobnost jevu A rovna:

$$P(A) = \frac{m}{n} \tag{15}$$

Základním předpokladem klasické definice pravděpodobnosti je však stejná možnost či pravděpodobnost konečného počtu elementárních jevů. Tento předpoklad ale nebývá často splněn. Z tohoto důvodu byla zavedena tzv. statistická definice pravděpodobnosti jejímž autorem byl **R. von Mises**.

Statistická definice pravděpodobnosti

Statistická definice pravděpodobnosti se zakládá na relativní četnosti jevu A, jehož pravděpodobnost $P(A)$ se snažíme určit.

V podstatě odhadujeme pravděpodobnost pomocí relativní četnosti v sérii dostatečně velkého počtu nezávislých pokusů, což lze symbolicky zapsat takto:

$$P(A) \approx \frac{m}{n} \quad . \tag{16}$$

Rozdíl mezi klasickou a statistickou definicí pravděpodobnosti spočívá v tom, že u klasické definice pravděpodobnost určíme na základě podílu příznivých a možných výsledků dle objektivních vlastností zkoumaného jevu určených před pokusem. Zatímco podle statistické definice tento podíl odhadujeme na základě výsledků skutečně provedených pokusů.

Pravděpodobnost a její vlastnosti

Uvedeme některé pravidla pro počítání s pravděpodobnostmi:

- Jsou-li jevy A a B vzájemně neslučitelné, pak

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) \tag{17}$$

- Jsou-li jevy A a B dva libovolné jevy, pak

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) \tag{18}$$

- Jsou-li jevy A a $\bar{A}$ vzájemně opačné jevy, pak

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A) \tag{19}$$

- Platí-li že $A \subset B$, pak

$$P(A) \leq P(B) \tag{20}$$

- Je-li$A \subset B$, pak

$$P(B - A) = P(B) - P(A) \tag{21}$$

- Jsou-li A, B dva libovolné jevy, pak

$$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B) \tag{22}$$

Podmíněná pravděpodobnost

Pokud je jev A vázán na uskutečnění jevu B, pak tento jev nazýváme jevem podmíněným jevu B a značíme jej $A|B$. Při určování podmíněné pravděpodobnosti se množina všech možných výsledků náhodného pokusu omezí pouze na ty výsledky, jež vyhovují dané podmínce. Pravděpodobnost podmíněného jevu pak definujeme takto:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{přičemž se předpokládá, že} \quad P(B) > 0. \tag{23}$$

Z výše uvedeného vztahu plyne následující rovnice:

$$P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B) \tag{24}$$

Zaměníme-li pak formálně A a B

$$P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A) \tag{25}$$

Tyto vzorce slouží pro výpočet současného výskytu jevů A a B a bývají označovány jako věty o násobení pravděpodobností. Větu o násobení pravděpodobností lze zobecnit pro n jevů kde $n > 2$:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1) \cdot P(A_2|A_1) \cdot P(A_3|A_1 \cap A_2) \cdot \dots \cdot P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_{n-1}) \tag{26}$$

Pokud se bude jednat o nezávislé jevy, pak se věta o násobení pravděpodobností zjednoduší, neboť platí:

$$P(A|B) = P(A) \tag{27}$$

$$P(B|A) = P(A) \tag{28}$$

a tedy

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B). \tag{29}$$

Obdobně pak pro n nezávislých jevů.

Bayesův vzorec

Pokud mají náhodné jevy $B_1, B_2, B_3, \cdots, B_n$ nenulové pravděpodobnosti a zároveň tvoří úplný rozklad pravděpodobnostního prostoru Ω, tj.

$$\Omega = \bigcup_{i=1}^{n} B_i \ , \quad \text{přičemž } B_i \cap B_j = \emptyset \ \text{ pro } \ i \neq j$$

Pak lze libovolný jev A vyjádřit pomocí jevů B_j pro $j = 1, 2, \cdots, n$ takto:

$$A = (A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n) \ . \tag{30}$$

Postupným užitím věty o sčítání pravděpodobností pro neslučitelné náhodné jevy a věty o násobení pravděpodobností získáme předpis pro výpočet pravděpodobnosti jevu A, někdy také nazývaný **vzorec úplné pravděpodobnosti**.

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A|B_j) \cdot P(B_j) \tag{31}$$

Pokud je i $P(A) > 0$, pak pro každý index $i \in \{1, 2, \cdots, n\}$ bude platit:

$$P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i) \cdot P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j) \cdot P(B_j)} \tag{32}$$

Tento vztah se nazývá **Bayesovým vzorcem**.