

Téma 4. Řešené příklady

1. Do autobusu městské hromadné dopravy nastoupilo 30 cestujících. Z nich 3 nemají ani označený lístek ani průkazku. V autobusu je revizor, a protože by nestihl do příští stanice zkontrolovat všech 30 cestujících, rozhodl se, že zkontroluje pouze 5 náhodně vybraných z nich. Jaká je pravděpodobnost, že mezi kontrolovanými bude
- právě 1 černý pasažér,
 - nejvýše 2 černí pasažéři,
 - jen černí pasažéři?

Řešení:

$$\text{a) } P(A) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{27}{4}}{\binom{30}{5}} = 0,369$$

$$\text{b) } P(B) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{27}{5}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{27}{4}}{\binom{30}{5}} + \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{27}{3}}{\binom{30}{5}} = 0,99754$$

nebo

$$P(B) = 1 - P(C) = 1 - 0,00246 = 0,99754$$

$$\text{c) } P(C) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{27}{2}}{\binom{30}{5}} = 0,00246$$

2. Ve spořitelně pracuje 15 mužů a 21 žen; z toho 6 zaměstnanců sjednává stavební spoření. Vypočítejte pravděpodobnost, že jsou to
- jen muži,
 - jen ženy,
 - z jedné poloviny ženy a z jedné poloviny muži,
 - buď samí muži nebo samé ženy.

Řešení:

$$\text{a) } P(A) = \frac{\binom{15}{6} \cdot \binom{21}{0}}{\binom{36}{6}} = 0,00257$$

$$\text{b) } P(B) = \frac{\binom{21}{6} \cdot \binom{15}{0}}{\binom{36}{6}} = 0,0278$$

$$c) P(C) = \frac{\binom{15}{3} \cdot \binom{21}{3}}{\binom{36}{6}} = 0,310$$

$$d) P(D) = P(A) + P(B) = 0,0303$$

3. Podle telefonního seznamu žije v Č. Budějovicích 15 p. Svobodů, z nichž dva jsou Vašimi přáteli. V rámci anketního šetření navštívili tazatelé 5 občanů tohoto jména. Jaká je pravděpodobnost, že mezi navštívenými

- a) bude alespoň jeden z Vašich přátel,
b) bude první Váš přítel?

Řešení:

$$a) P(A) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{13}{4} + \binom{2}{2} \cdot \binom{13}{3}}{\binom{15}{5}} = 0,571$$

$$b) P(B) = \frac{2}{15} = 0,133$$

4. Na mezinárodní letecké lince New York – Mexiko havarovalo dopravní letadlo, v němž cestovalo 15 osob (12 cestujících a 3 členové posádky). Při havárii zahynulo 6 osob. Jaká je pravděpodobnost, že

- a) zahynula celá posádka,
b) nezahynul žádný člen posádky,
c) zahynul právě jeden člen posádky?

Řešení:

$$a) P(X = 3) = \frac{\binom{3}{3} \cdot \binom{12}{3}}{\binom{15}{6}} = 0,0439$$

$$b) P(X = 0) = \frac{\binom{3}{0} \cdot \binom{12}{6}}{\binom{15}{6}} = 0,184$$

$$c) P(X = 1) = \frac{\binom{3}{1} \cdot \binom{12}{5}}{\binom{15}{6}} = 0,474$$

5. Máme zásilku, v níž je 45 kvalitních a 5 nekvalitních výrobků. Vybereme 8 kusů. Jaká je pravděpodobnost, že

- a) budou všechny vybrané kusy kvalitní,
b) vybereme právě tři zmetky,
c) vybereme nejvýše dva zmetky?

Řešení:

$$\text{a) } P(A) = \frac{\binom{45}{8} \cdot \binom{5}{0}}{\binom{50}{8}} = 0,401 \qquad \text{b) } P(B) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{45}{5}}{\binom{50}{8}} = 0,0227$$

$$\text{c) } P(C) = \frac{\binom{5}{0} \cdot \binom{45}{8}}{\binom{50}{8}} + \frac{\binom{5}{1} \cdot \binom{45}{7}}{\binom{50}{8}} + \frac{\binom{5}{2} \cdot \binom{45}{6}}{\binom{50}{8}} = 0,975$$

6. Ve velké nemocnici pracuje 20 chirurgů, z nichž 12 je vynikajících odborníků a ostatní těmito slovy charakterizovat nelze. Pacient nezná odbornou kvalitu lékařů, má však právo zvolit si pro svou operaci 3-členný operační tým. Rozhoduje se tedy podle důvěry. Jaká je pravděpodobnost, že jej budou operovat
- pouze vynikající odborníci,
 - převážně vynikající odborníci,
 - pouze odborně méně zdatní lékaři?

Řešení:

$$\text{a) } P(A) = \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{8}{0}}{\binom{20}{3}} = 0,193$$

$$\text{b) } P(B) = \frac{\binom{12}{3} \cdot \binom{8}{0}}{\binom{20}{3}} + \frac{\binom{12}{2} \cdot \binom{8}{1}}{\binom{20}{3}} = 0,656$$

$$\text{c) } P(C) = \frac{\binom{12}{0} \cdot \binom{8}{3}}{\binom{20}{3}} = 0,049$$

Řešení v Excelu:

Náhodná veličina X (počet vynikajících odborníků v týmu), má hypergeometrické rozdělení. Příklad lze řešit v Excelu pomocí funkce HYPERGEOMDIST.

- do buňky vepíšeme =HYPGEOMDIST(3;3;12;20) a stiskneme Enter. Hledaná pravděpodobnost je 0,192982.
- zadání odpovídá hledání pravděpodobnosti $P(X \geq 2)$. V Excelu vepíšeme do buňky vzorec =SUMA(HYPGEOMDIST(0;3;12;20)+ HYPGEOMDIST(2;3;12;20)). Hledaná pravděpodobnost je 0,65614.
- do buňky vepíšeme =HYPGEOMDIST(0;3;12;20) a stiskneme Enter. Hledaná pravděpodobnost je 0,049123.

8. Slečna Malá si na letošní plesovou sezónu pořídila 2 večerní toalety. První model pochází z dílny módního návrháře G. Versaceho, zatímco druhý model pochází ze salónu Blanky Matragi. Slečna Malá chce během letošní sezóny navštívit 6 plesů. Pravděpodobnost, že si oblékne šaty od Versaceho je 0,58. Jaká je pravděpodobnost, že
- na první dva plesy si oblékne šaty od Versaceho a na další 4 plesy šaty od paní Matragi,
 - šaty od Versaceho bude mít na dvou plesech a čtyřikrát ji uvidíme v šatech od paní Matragi,
 - v šatech od Versaceho ji uvidíme během letošní sezóny alespoň dvakrát,
 - v šatech od paní Matragi ji letos neuvidíme vůbec.

Řešení:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(A) &= 0,58^2 \cdot 0,42^4 = 0,0104 & \text{b) } P(B) &= \binom{6}{2} \cdot 0,58^2 \cdot 0,42^4 = 0,157 \\
 \text{c) } P(C) &= 1 - \left[\binom{6}{0} \cdot 0,58^0 \cdot 0,42^6 + \binom{6}{1} \cdot 0,58^1 \cdot 0,42^5 \right] = 0,949 \\
 \text{d) } P(D) &= \binom{6}{0} \cdot 0,42^0 \cdot 0,58^6 = 0,038
 \end{aligned}$$

9. Víte-li, že náhodná veličina X má rozdělení $Po(0, 5)$, spočítejte
- $P(X = 5)$,
 - $P(X \leq 5)$,
 - $P(X > 5)$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(X = 5) &= 0 & \text{b) } P(X \leq 5) &= F(5) = 0,99999 \\
 \text{c) } P(X > 5) &= 1 - P(X \leq 5) = 0,00001
 \end{aligned}$$

10. Víte-li, že náhodná veličina X má rozdělení $N(68,3;0,04)$, spočítejte
- $P(X \leq 69)$,
 - $P(68 < X \leq 69)$,
 - $P(X > 69)$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(X \leq 69) &= F(69) = 0,999 & \text{b) } P(68 < X \leq 69) &= F(69) - F(68) = 0,933 \\
 \text{c) } P(X > 69) &= 1 - F(69) = 0,001
 \end{aligned}$$

11. Víte-li, že náhodná veličina X má rozdělení $B_i(10;0,2)$, spočítejte
- $P(X = 2)$,
 - $P(X < 2)$,
 - $P(X \geq 2)$.

Řešení:

$$\begin{aligned}
 \text{a) } P(X = 2) &= 0,302 & \text{b) } P(X < 2) &= 0,376 & \text{c) } P(X \geq 2) &= 0,624
 \end{aligned}$$

12. Víte-li, že náhodná veličina X má rozdělení $H(5; 10; 3)$, spočítejte

- a) $P(X = 2)$,
- b) $P(X < 2)$,
- c) $P(X \geq 2)$.

Řešení:

a) $P(X = 2) = 0,417$ b) $P(X < 2) = 0,4999$ c) $P(X \geq 2) = 0,5111$

13. Najděte hodnoty

- a) $u_{0,95}; u_{0,05}$,
- b) $t_{0,95}(9); t_{0,05}(9)$,
- c) $\chi^2_{0,95}(9); \chi^2_{0,05}(9)$,
- d) $F_{0,95}(5,12)$,
- e) $F_{0,05}(5,12)$,
- f) $F_{0,95}(12,5)$,
- g) $F_{0,05}(12,5)$.

Řešení:

a) 1,645; -1,645 b) 1,833; -1,833 c) 16,919; 3,325
d) 3,106 e) 0,214 f) 4,678 g) 0,322

14. Víte-li, že náhodná veličina X má rozdělení $N(50, 4)$, spočítejte

- a) $P(X \leq 49)$,
- b) $P(X > 55)$,
- c) $P(49 < X \leq 55)$,
- d) stanovte $F(45)$.

Řešení:

a) $P(X \leq 49) = 0,308$ b) $P(X > 55) = 0,006$
c) $P(49 < X \leq 55) = 0,685$ d) $F(45) = 0,0062$

15. Střední hodnota hmotnosti novorozенých chlapců je 3400 gramů se směrodatnou odchylkou $\sigma = 600$ gramů. Stanovte pravděpodobnost, že novorozený chlapec bude vážit

- a) maximálně 4 000 gramů,
- b) více než 4 000 gramů,
- c) mezi 2 000 – 4 000 gramy.

Řešení:

Jedná se o rozdělení $N(3400; 3600)$.

a) $P(X \leq 4000) = 0,841$ b) $P(X > 4000) = 0,159$ c) $P(2000 < X \leq 4000) = 0,831$

16. Denní přírůstky hmotnosti býků českého strakatého skotu (v gramech) mají v určitém věkovém období rozdělení $N(1126, 10000)$. Jaká část populace býků má v tomto období denní přírůstky

- a) v rozmezí $(1100 ; 1200 >$,

b) maximálně 1100 g,

c) vyšší než 1300 g ?

Řešení:

a) $P(1100 < X \leq 1200) = 0,373$ b) $P(X \leq 1100) = 0,397$ c) $P(X > 1300) = 0,041$