Teorie odhadu [1]

[1] Tyto materiály byly vytvořeny za pomoci grantu FRVŠ číslo 1145/2004.

Bodový × intervalový odhad

Obvykle pořizujeme či zpracováváme jeden výběrový soubor. Na jeho základě lze získat konkrétní hodnoty sledovaných charakteristik. Pokud bychom pořizovali další výběry, získali bychom pravděpodobně jiné hodnoty sledovaných charakteristik. V tomto pojetí je tedy výběrový ukazatel, tj. námi sledovaná charakteristika náhodnou veličinou. Studium rozdělení těchto charakteristik hraje velkou roli při statistické indukci. K odhadu námi sledovaných charakteristik (statistik) lze použít dva typy odhadů, a to bodový a intervalový.

Jestliže odhad nějakého parametru či charakteristiky rozdělení vyjadřujeme za pomoci jediného čísla hovoříme o tzv. bodovém odhadu. Například $\bar{x}$ je bodovým odhadem střední hodnoty μ.

Je zřejmé, že bodový odhad neposkytuje žádnou informaci o kvalitě tohoto odhadu. Neříká nám nic o tom k jakému největšímu rozdílu mezi odhadem a skutečnou hodnotou parametru může dojít. Proto se často využívá druhého přístupu. Ten spočívá v tom, že odhad vyjádříme pomocí dvou čísel, mezi nimiž se pohybuje skutečná hodnota hledaného parametru s předem zvolenou pravděpodobností. Čísla vymezující tento interval se nazývají dolní a horní mez intervalu spolehlivosti. Interval nazýváme $100(1-\alpha)$%-ní konfidenční interval nebo též $100(1-\alpha)$%-ní interval spolehlivosti. Číslo $1-\alpha$ nazýváme koeficientem spolehlivosti. Číslo α pak hladinou významnosti. Spolehlivost odhadu volíme sami. Většinou chceme aby byla blízko 1 a volíme $\alpha = 0,01$ nebo častěji $\alpha = 0,05$.

Požadavky na kvalitní odhad

Na odhad klademe jisté požadavky a chceme aby byl náš odhad tzv. kvalitní. Co tím myslíme? Kvalitním odhadem rozumíme odhad který splňuje následující požadavky:

- je nestranný
- je konzistentní
- je vydatný
- je robustní

Vysvětleme stručně tyto termíny. Výběrová statistika (charakteristika) T je nestranným odhadem statistiky Θ, je-li $E(T) = \Theta$. Platí-li že,

$$\lim_{n\to\infty}(E(T) - \Theta) = 0, \tag{1}$$

pak je statistika T asymptoticky nestranným odhadem Θ.

Za konzistentní odhad statistiky Θ označíme takovou statistiku T která splňuje rovnost

$$\lim P_{n\to\infty}(|\Theta - T| < \varepsilon) = 1. \tag{2}$$

Za vydatný odhad statistiky Θ označíme takovou statistiku T, která má ze všech nestranných odhadů nejmenší rozptyl.

Za robustní odhad statistiky Θ označíme takovou statistiku T, u které nemají vychýlené hodnoty způsobené např. hrubou chybou měření příliš velký vliv na kvalitu odhadu.

Intervaly spolehlivosti pro střední hodnotu

Jak bylo řečeno výše, podstatou intervalového odhadu charakteristiky Θ je určit statistiky T_D a T_H, tak aby platilo

$$P(T_D \leq \Theta \leq T_H) = 1 - \alpha \tag{3}$$

v případě oboustranného intervalu spolehlivosti, nebo

$$P(\Theta \leq T_H) = 1 - \alpha \tag{4}$$

resp.

$$P(T_D \leq \Theta) = 1 - \alpha \tag{5}$$

v případě jednostranných intervalů spolehlivosti.

V případě, že byl náš výběr získán z rozdělení $N(\mu; \sigma^2)$, kde tento rozptyl není znám, je hledaný oboustranný $100(1-\alpha)$%-ní interval spolehlivosti parametru μ dán následovně:

$$P\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) < \mu < \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha \tag{6}$$

ekvivalentně

$$P\left(\bar{x} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1); \bar{x} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)\right) = 1 - \alpha\ . \tag{7}$$

Hodnota $\frac{s}{\sqrt{n}}$ je odhadem směrodatné odchylky výběrového průměru a nazývá se standardní chybou. Hodnotu $\frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1)$ nazýváme přípustnou chybou a označujeme ji pomocí symbolu Δ. Přípustná chyba charakterizuje přesnost odhadu. Jinými slovy udává maximální chybu které se můžeme při odhadu střední hodnoty dopustit na předem zvolené hladině významnosti α.

Pokud bychom se zajímali o jednostranné intervaly spolehlivosti pro střední hodnotu, pak ty jsou následující

$$\left(-\infty; \bar{x} - t_\alpha(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}\right) \tag{8}$$

a

$$\left(\bar{x} - t_{1-\alpha}(n-1)\frac{s}{\sqrt{n}}; +\infty\right)\ . \tag{9}$$

Využití intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu

Interval spolehlivosti pro μ lze využít trojím způsobem:

- Máme-li k dispozici výběrový soubor, stanovíme si $1-\alpha$, provedeme intervalový odhad střední hodnoty a spočítáme přípustnou chybu Δ.
- Určíme si spolehlivost odhadu spolu s přípustnou chybu a zjišťujeme jak velký musíme vybrat soubor, abychom při dané spolehlivosti odhadu nepřekročili přípustnou chybu. Postupujeme dle vzorců

  $$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{m}(x_i-\hat{x})^2}{m-1}}, \qquad n = \left(\frac{st_{1-\alpha/2}(m-1)}{\Delta}\right)^2 \tag{10}$$

  Je-li $n \leq m$, pak je rozsah souboru dostačující. Pokud je $n > m$ je nutno výběr doplnit o $n-m$ jednotek.
- Máme-li k dispozici výběrový soubor, stanovíme si Δ a zjišťujeme, s jako spolehlivostí $1-\alpha$ odhadujeme μ.

Intervaly spolehlivosti pro rozptyl a směrodatnou odchylku

Pokud čelíme situaci, kdy neznáme parametr μ a výběr byl proveden z rozdělení $N(\mu;\sigma^2)$, pak je oboustranný interval spolehlivosti pro rozptyl vyjádřen následovně:

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)} < \sigma^2 < \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right) = 1-\alpha. \tag{11}$$

Interval

$$\left(\frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}(n-1)}; \frac{(n-1)s^2}{\chi^2_{\alpha/2}(n-1)}\right) \tag{12}$$

je tedy oboustranným $(1-\alpha)100\%$-ním intervalem spolehlivosti pro parametr σ^2. Drobnou úpravou lze získat intervalový odhad pro směrodatnou odchylku. Jistě víte jakou. Obdobně lze získat jednostranné intervaly spolehlivosti. Vyjdeme přitom ze vztahu

$$P\left(\chi^2_{(}n-1) < \frac{(n-1)s^2}{\sigma^2}\right) = 1-\alpha \tag{13}$$

nebo

$$P\left(\frac{(n-1)s^2}{\sigma^2} < \chi^2_{1-\alpha}(n-1)\right) = 1-\alpha\ . \tag{14}$$